Janvier 2020
(2 heures et 30 minutes)

1. a) Soit A, sous-ensemble non vide et borné de IR.

Définir: - **infimum et minimum** de A
- **point d'accumulation** de A (1 pt.)

b) Compléter les cases du tableau suivant par une valeur réelle si elle existe ou par $\nexists$ sinon. Justifier soigneusement les réponses des cases grisées du tableau.

Remarque : A est un sous-ensemble de IR.

A	un point intérieur de A	un point d'accumulation de A qui n'appartient pas à A	un réel qui n'est ni majorant, ni minorant de A	l'infimum de A	le minimum de A
$\{x \in IR_0 : \lvert x\rvert < 3\}$					
$\{x \in \mathbb{Z} : \lvert x\rvert < 3\}$					
dom f pour $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2(3-x)}}$					

(3 pts.)

2. a) Définir : - suite réelle **convergente**, suite réelle **divergente**.
- suite réelle **bornée** (1 pt.)

b) Démontrer que l'ensemble des termes d'une suite convergente est borné. (1.5 pt.)

c) Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in IN_0}$ avec $u_n = \frac{-4n^p + 5n + 3n^3 - 3}{2n^2 + n + 7n^3}$ avec $p \in IN$.

Pour quelle(s) valeur(s) de p $(\in IN)$ la suite (u_n) converge-t-elle ?

Pour quelle(s) valeur(s) de p $(\in IN)$ la suite (u_n) diverge-t-elle ?

Donner dans chaque cas, si elle existe, la valeur de $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$ dans $\overline{IR}$. (2 pts.)

3. a) Définir : fonction **dérivable** en un point
maximum local d'une fonction (1 pt.)

b) Enoncer la **condition nécessaire du premier ordre** relative aux extrema d'une fonction f(x).
Ne pas démontrer. (0.5 pt.)

c) Soit $f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-3)+4 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4x + \ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

1°) Déterminer, en détaillant le raisonnement et/ou les calculs, le domaine de définition de f(x).

2°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f(x).

3°) Déterminer f '(x), la fonction dérivée de f(x).

4°) Déterminer les « candidats » extremum de f(x). Classer ceux-ci (maximum local, minimum local ou ni l'un, ni l'autre) en énonçant le(s) théorème(s) utilisé(s). (5 pts.)

4. Enoncer et démontrer (en détaillant la démonstration !) le **théorème des accroissements finis**.
En donner une interprétation géométrique (dessin et explication !!). (2.5 pts.)

5. Donner (réponse finale uniquement)

a) pour la fonction $f(x) = x^{5x}$ $(x > 0)$

1°) sa fonction dérivée f '(x)

$$\boxed{f'(x)=(5.\ln x+5).x^{5x}}$$

2°) l'<u>équation</u> de la tangente à la courbe d'équation y = f(x) en son point d'abscisse 1

$$\boxed{y=5x-4}$$

(1 pt.)

b) pour les points a (4,1), b (8,-1) et c(4,-3)

1°) l'<u>équation</u> de la médiane M du triangle abc issue du sommet a

$$\boxed{y=-\frac{3}{2}x+7}$$

2°) l'<u>équation</u> de la hauteur H du triangle abc issue du sommet b

$$\boxed{y=-1}$$

3°) les coordonnées du point p, intersection de M et H $\boxed{(\frac{16}{3},-1)}$

4°) la distance entre les points a et b $\boxed{2\sqrt{5}}$

(1 pt.)

c) la valeur dans $\overline{\mathrm{IR}}$, si elle existe, de $\lim\limits_{x\to+\infty}(x.e^{\frac{2}{x}}-x)$ $\boxed{2}$

(0.5 pt.)

Réponse question 1 a)

(A est **minoré** ssi il existe un réel b tel que $b \le a \;\forall\; a \in A$; b est alors un **minorant** de A.)

Si A est minoré, il possède un et un seul plus grand minorant: l'**infimum** de A.

Si A est un ensemble minoré, le réel m est un **minimum** de A ssi m est infimum de A et $m \in A$.

Un point a est un **point d'accumulation** de A ssi il existe une suite de points de A, distincts de a, qui converge vers a.

Réponse question 1 b)

A	un point intérieur de A	un point d'accumulation de A qui n'appartient pas à A	un réel qui n'est ni majorant, ni minorant de A	l'infimum de A	le minimum de A
$\{x \in IR_0 : \lvert x\rvert < 3\}$	2	3	0	-3	$\nexists$
$\{x \in \mathbb{Z} : \lvert x\rvert < 3\}$	$\nexists$	$\nexists$	0	-2	-2
dom f pour $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2(3-x)}}$	2	1	2	$\nexists$	$\nexists$

Justifications :

(1) 0 n'est ni un majorant, ni un minorant de A = $\{x \in \mathbb{Z} : \lvert x\rvert < 3\}$.

En effet, l'ensemble A = $\{x \in \mathbb{Z} : \lvert x\rvert < 3\} = \{-2,-1,0,1,2\}$

Le réel 0 n'est pas un majorant de A puisque 0 < 1 qui appartient à A.

Le réel 0 n'est pas un minorant de A puisque 0 > -1 qui appartient à A.

(2) 1 n'appartient pas à A et est un point d'accumulation de A = dom f pour f(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2(3-x)}}$

puisque, d'une part, la condition d'existence pour la fonction f(x) est $(x-1)^2(3-x) > 0$. En étudiant le signe de $(x-1)^2(3-x)$, on a

x		1		3	
$(x-1)^2(3-x)$	+	0	+	0	-

Donc, dom f = $]-\infty,1[\ \cup\ ]1,3[$.

D'autre part, la suite $(1-\frac{1}{n})$ est une suite de de points de A, distincts de 1, qui converge vers 1.

Réponse question 2 a)

Une suite réelle **convergente** est une suite réelle qui possède une limite finie (réelle).

Une suite réelle **divergente** est une suite réelle qui ne converge pas.

Une suite réelle $(u_n)_{n\in IN_0}$ est **bornée** ssi il existe deux nombres réels c et d tels que

$$\forall\ n \in IN_0 : c \le u_n \le d.$$

Réponse question 2 b)

L'ensemble des termes d'une suite convergente est borné

<u>Preuve</u> :

Soit $(u_n)_{n\in IN}$, une suite convergente de limite u. On a $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in IN : n > N \Rightarrow |u_n - u| < \varepsilon$.

De là, pour ε = 1, $\exists N \in IN : n > N \Rightarrow |u_n - u| < 1$.

Soit M, le plus grand des nombres $|u_0 - u|, |u_1 - u|, |u_2 - u|, ..., |u_N - u|, 1$.

Alors, $|u_n - u| \le M$ pour tout n de IN et $u - M \le u_n \le u + M$ pour tout n de IN, d'où la thèse.

Réponse question 2 c)

On a la suite réelle $(u_n)_{n\in IN_0}$ avec $u_n = \dfrac{-4n^p + 5n + 3n^3 - 3}{2n^2 + n + 7n^3}$ avec $p \in IN$.

Il s'agit d'une suite « quotient de polynômes ».

Une telle suite converge ssi le degré de son numérateur est inférieur ou égal au degré de son dénominateur. Elle diverge dans le cas contraire, donc si le degré du numérateur est strictement supérieur à celui du dénominateur.

Le degré du dénominateur vaut 3.
Le degré du numérateur dépend de la valeur de p :

Si p < 3, le degré du numérateur est également 3, la suite converge, et la limite de la suite est le quotient des coefficients des termes de degré 3 au numérateur et au dénominateur, donc vaut $\dfrac{3}{7}$.

Si p = 3, on a $u_n = \dfrac{-4n^3 + 5n + 3n^3 - 3}{2n^2 + n + 7n^3} = \dfrac{-n^3 + 5n - 3}{2n^2 + n + 7n^3}$, les degrés du numérateur et du dénominateur sont également égaux (à 3) et, comme ci-dessus, la suite converge et la limite de la suite est le quotient des coefficients des termes de degré 3 au numérateur et au dénominateur, donc vaut $-\dfrac{1}{7}$.

Si p > 3, le degré du numérateur est p et est donc supérieur au degré du dénominateur, donc la suite diverge et la limite de la suite est infinie. Elle vaut ici $-\infty$ puisque le coefficient de n^p est négatif (au numérateur) et le coefficient de n^3 au dénominateur est positif.

Réponse question 3 a)

Soit f: D $\to$ IR: x $\to$ f(x) et a, un point intérieur de D.

f est **dérivable** en a ssi $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans IR.

Soit f : IR $\to$ IR : x $\to$ f(x) et a $\in$ dom f.

f possède un **maximum local** en a ssi $\exists\ \eta > 0 : \forall\ x \in (a-\eta, a+\eta) \cap$ dom f : f(a) ≥ f(x).

Réponse question 3 b)

Condition nécessaire du premier ordre :

Soit f: D $\to$ IR: x$\to$ f(x) et a, un point intérieur de D.
Si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a, alors f '(a) = 0.

Réponse question 3 c)

On a $f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-3)+4 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{4x+\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

1°) En ce qui concerne les $x \le 1$, f(x) = $(x-1)(x-3)+4$ et il n'y a pas de condition d'existence, donc,

f(x) est définie sur $]-\infty,1]$.

En ce qui concerne les x > 1, f(x) = $\frac{4x+\ln x}{x}$ et on a les conditions d'existence x > 0 (existence de ln), qui est vérifiée et $x \neq 0$ (dénominateur) qui est également vérifiée, donc,

f(x) est définie sur $]1,+\infty[$.

Par conséquent, le domaine de définition de f(x) est IR .

2°) Etude de la continuité et de la dérivabilité de f(x)

a) Dans l'ouvert $]-\infty,1[$, f(x) = $(x-1)(x-3)+4$, fonction polynôme, continue et dérivable dans IR.

Par conséquent, **f(x) est continue et dérivable dans** $]-\infty,1[$.

b) Dans l'ouvert $]1,+\infty[$, f(x) = $\frac{4x+\ln x}{x}$.

$\frac{4x+\ln x}{x}$ est le quotient

- de la somme de la fonction polynôme 4x, continue et dérivable dans IR et de ln x, continue et dérivable dans IR_0^+. Par conséquent, le numérateur est continu et dérivable dans IR_0^+
- de la fonction polynôme x, continue et dérivable dans IR,

La fonction $\frac{4x+\ln x}{x}$ est donc continue et dérivable dans IR_0^+ (le dénominateur s'annule en 0, donc ne pose pas de « problème » supplémentaire).

Par conséquent, **f(x) est continue et dérivable dans** $]1,+\infty[$.

c) Etude de la continuité de f(x) en x = 1

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} ((x-1)(x-3)+4) = (1-1)(1-3)+4$ (limite d'une fonction continue en x = 1) = 4.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{4x+\ln x}{x} = \frac{4.1+\ln 1}{1}$.(limite d'une fonction continue en x = 1) = 4

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)$ existent dans IR et valent 4, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe dans IR et vaut 4.

Or, f(1) = 4, d'où **la fonction f(x) est continue en x = 1**.

De a), b) et c), **la fonction f(x) est continue dans son domaine de définition** IR .

En ce qui concerne la dérivabilité, par a) et b), on sait que f(x) est dérivable dans $IR \setminus \{1\}$ au moins.

d) Etude de la dérivabilité de f(x) en x = 1

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{((x-1)(x-3)+4)-4}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (x-3) =$ 1 - 3 (lim.fct.C° en x = 1) = -2.

Comme cette valeur est réelle, **f(x) est dérivable à gauche en x = 1 et f '$_g$ (1) = - 2.**

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\frac{4x+\ln x}{x}-4}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\ln x}{x(x-1)}$.

On constate que $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \ln x = \ln 1$ (lim.fct.C° en x = 1) = 0 et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} (x(x-1)) = 0$ (lim.fct.C° en x = 1).

Ce calcul de limite donne donc une opération indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

On a le **théorème de de l'Hospital** :

<table><tr><td>
Soient g : D → IR : x → g(x) et h : D → IR : x → h(x).

Si g et h sont dérivables dans un voisinage à droite de a et

Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} h(x) = 0$ et

Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{g'(x)}{h'(x)}$ existe dans $\overline{IR}$

Alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{g'(x)}{h'(x)}$.
</td></tr></table>

En prenant g(x) = $\ln x$ et h(x) = x(x -1), on constate que

- les fonctions $\ln x$ et $(x(x-1))$ sont dérivables au voisinage à droite de x = 1 (puisque la première est dérivable dans] 0, + ∞ [et la seconde dans IR),

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \ln x = \ln 1$ = 0 et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x(x-1)) = 0$ (voir plus haut)

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{(\ln x)'}{(x.(x-1))'} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\frac{1}{x}}{2x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{x.(2x-1)}$ (limite de fonction C° en x = 1) = $1 \in \overline{IR}$.

Par le théorème de de l'Hospital cité ci-dessus, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\ln x}{x(x-1)} = 1 \in IR$.

Par conséquent, f(x) est dérivable à droite en x = 1 et $f'_d(1) = 1$.

Comme $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$ sont différentes,

la fonction f(x) n'est pas dérivable en x = 1.

3°) En utilisant les règles de dérivation dans $]-\infty, 1[$ pour $(x-1)(x-3)+4$ $(= x^2 - 4x + 7)$ et dans $]1, +\infty[$ pour $\frac{4x + \ln x}{x}$, la fonction dérivée de f(x) est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1-\ln x}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

4°) Recherche des extrema de f(x)

Les "candidats" extremum de f sont, parmi les points de dom f,

a) les éventuels points critiques de f(x) : il y en a un : x = e ;
b) les éventuels points en lesquels f(x) n'est pas dérivable : il y en a un seul x = 1 ;
c) les éventuels points qui ne sont pas intérieurs à dom f : il n'y en a pas ici puisque le domaine de définition de f est ouvert.

On a le théorème suivant :

Si f(x) est continue en a et s'il existe un $\eta > 0$ tel que $\forall$ x $\in$ $(a-\eta, a) \cap$ dom f, f est dérivable en x et $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) et $\forall$ x $\in$ $(a, a+\eta) \cap$ dom f, f est dérivable en x et $f'(x) \leq 0$ (≥ 0) Alors, f(x) possède un maximum (minimum) local en a.

Comme la fonction étudiée ici est continue dans dom f et dérivable dans dom f sauf au point x = 1, l'étude du signe de f '(x) au voisinage des points candidats extremum nous permettra d'étudier la croissance de f(x) et de conclure.

x		1		e	
f '(x)	-	$\nexists$	+	0	-

Le théorème cité ci-dessus nous permet d'affirmer que la fonction étudiée possède un

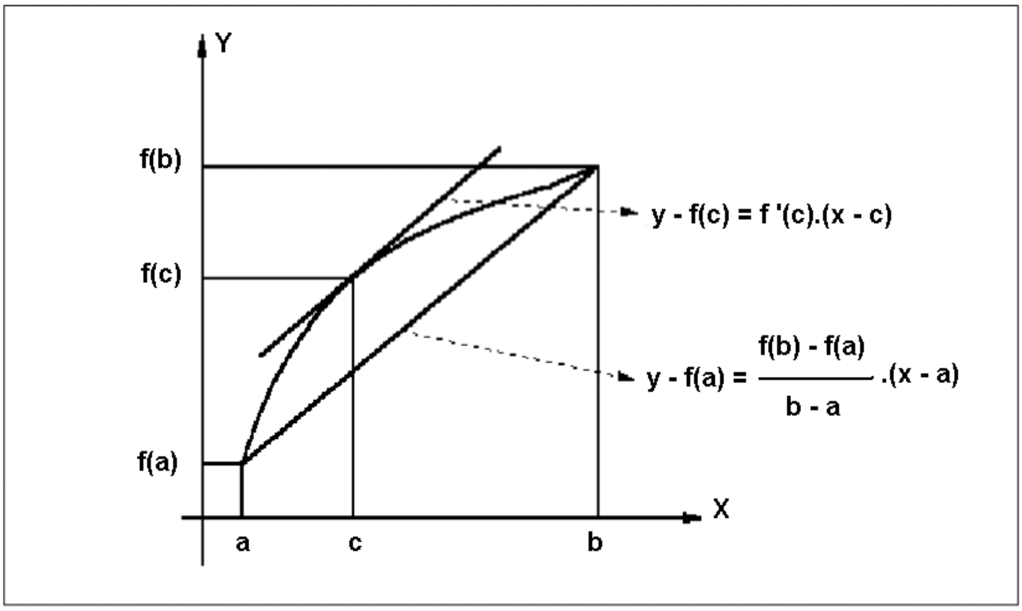
minimum local en x = 1 de valeur 4, et un **maximum local en x = e** de valeur $\frac{4e+1}{e}$.

Réponse question 4

La formule (ou le théorème) des accroissements finis :

<u>Proposition</u> : si f : [a,b] $\rightarrow$ IR est continue sur [a,b] et dérivable sur (a,b) (avec a < b), alors il existe c $\in$ (a,b) : f(b) – f(a) = (b – a).f'(c) $\Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Le dessin :



L'interprétation géométrique du théorème : sous les hypothèses de continuité de f sur [a,b] et de dérivabilité de f sur (a,b), il existe au moins un point c de (a,b) en lequel la tangente à la courbe d'équation y = f(x) est parallèle à la droite passant par (a,f(a)) et (b, f(b)).

Preuve :

■ On pose (avec a $\neq$ b) $g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$.

On a

- g(a) = 0 = g(b)
- g(x) est C° sur [a,b] et dérivable sur (a,b) puisque g(x) est la différence entre f(x) qui est, par hypothèse, C° sur [a,b] et dérivable sur (a,b) et d'un polynôme du premier degré en x, C° et dérivable dans IR.

On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g(x) sur l'intervalle [a,b] : il existe c $\in$ (a,b) tel que g'(c) = 0.

Or, $g'(x) = f'(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]'_x = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Il existe donc c $\in$ (a,b) tel que $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. ■