**Janvier 2020**
**(2 heures et 30 minutes)**

**1. a)** Soit $n \in IN_0 \setminus \{1\}$.

Définir : **combinaison linéaire convexe** de deux points de $IR^n$. Que signifie géométriquement cette définition ? (1 pt.)

**b)** Déterminer, en justifiant, et représenter <u>avec précision</u>, le domaine de définition de la fonction

$$f(x,y) = \frac{\ln(4-x^2)}{\ln y}$$

Donner, s'il en existe, en justifiant soigneusement votre choix

- un point intérieur de dom f
- un point adhérent à dom f mais qui ne lui appartient pas

Ce domaine est-il fermé? Est-il convexe? Justifier soigneusement.

(3 pts.)

**2.** Soit $f{:}D \subset IR^2 \to IR$: $(x,y) \to f(x,y)$ et a = $(x_0, y_0)$, point intérieur de D.

**a)** Compléter la définition suivante : f est **différentiable en a** ssi….

Que signifie géométriquement la notion de différentiabilité en un point d'une fonction de $IR^2 \to IR$ ? (1 pt.)

**b)** Soit $f(x,y) = \sqrt[3]{x}.|x| + 3y^2$.

(1) Etudier la dérivabilité de la fonction f(x,y) <u>**en (0,1)**</u>

(2) Etudier la différentiabilité de la fonction f(x,y) <u>**en (0,1)**</u>

(2.5 pts.)

**3. a)** Définir: fonction de $A \subset IR^n \to IR$ **homogène de degré** $\alpha$ dans A ($\alpha \in IR$). (0.5 pt.)

**b)** Soient les fonctions $f : IR^2 \to IR$, $g : IR \to IR$ et $h : IR \to IR$ telles que:

- f est strictement positive, différentiable et homogène de degré 0 dans $IR^2$
- g est différentiable et homogène de degré 2 dans IR
- h est différentiable et homogène de degré 3 dans IR

Soit les fonctions $F(x) = f(g(x), \frac{h(x)}{x})$ et G(x) = ln[F(x)].

1°) La fonction F est-elle homogène dans $IR_0$ ? Si oui, quel est son degré d'homogénéité ? Justifier soigneusement les étapes.

<u>Utiliser le résultat obtenu</u> pour vérifier si G est homogène dans $IR_0$.

2°) Donner, <u>sans justification</u>, les expressions <u>**complètes**</u> de F'(x) et de G'(x).

(2.5 pts.)

**4.** Soient $f : IR^n \to IR : x \to f(x)$ et $v \in IR^n$ tel que $\|v\| = 1$.

Quand dit-on que f est **dérivable en $\bar{x}$ dans la direction v** ?

Si f est différentiable en $\bar{x}$, démontrer que f est dérivable en $\bar{x}$ dans la direction v en donnant l'expression de la dérivée directionnelle correspondante.

(2 pts.)

**5.** Soient $f : D \subset IR^2 \to IR$ et $g : D \subset IR^2 \to IR$.

**a) Enoncer et démontrer** le **théorème de Lagrange** relatif à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0. (2.5 pt.)

**b)** Enoncer la **condition suffisante « forte » du second ordre** relative à l'optimisation de f(x,y) sous **l'unique** contrainte g(x,y) = 0. (0.5 pt.)

**c)** Soient $f(x,y) = e^{y-x^2}$ et $g(x,y) = 16x^2 + y^2 - 16$.

Déterminer, **par la méthode de Lagrange**, les "candidats" extremum de f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0.

Classer **<u>si possible</u>** ces candidats (minimum, maximum ou ni maximum, ni minimum) **<u>en utilisant la condition suffisante « forte » énoncée en b)</u>**.

Si ce n'est pas possible, ne pas les classer (ne pas utiliser la condition de la « Hessienne bordée »).

(3.5 pts.)

**6.** Déterminer (réponse finale uniquement)

la solution générale de l'équation différentielle $y''' - 3.y' = 5x - 3$.

$$\boxed{y = C_1 + C_2.e^{\sqrt{3}.x} + C_3.e^{-\sqrt{3}.x} - \frac{5}{6}x^2 + x \quad \forall C_1, C_2, C_3 \in IR}$$

(1 pt.)

**Réponse question 1 a)**

On appelle **combinaison linéaire convexe** de deux vecteurs (points, éléments) a,b de $IR^n$ tout vecteur x de tel que x = t.a + (1-t).b pour un t $\in$ [0,1].

Les combinaisons linéaires convexes de deux points sont en fait les points du segment de droite délimité par les deux points donnés.

---

**Réponse question 1 b)**

On a f(x,y) = $\dfrac{\ln(4-x^2)}{\ln y}$.

Les conditions d'existence pour cette fonction sont :

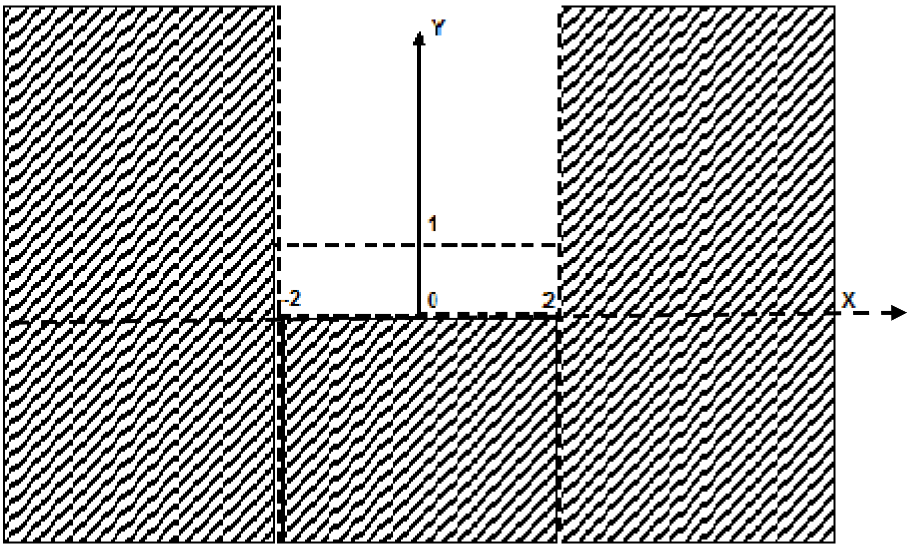
$4-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in ]-2,2[$

y > 0

$\ln y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$

Le domaine de définition de cette fonction est donc

Dom f = $\{(x,y) \in IR^2 : x \in ]-2,2[ \text{ et } y \in IR_0^+ \setminus \{1\}\}$ ou $]-2,2[ \ x\,(IR_0^+ \setminus \{1\})$




Légende: zones hachurées et lignes pointillées ne font pas partie de dom f.

Le point (1,2) est un **point intérieur** de dom f puisque la boule ouverte centrée en ce point et de rayon $\frac{1}{2}$, par exemple, est entièrement incluse dans dom f.

Le point (0,1) est un **point adhérent** à dom f mais qui ne lui appartient pas. En effet, il n'appartient pas à dom f puisque y =1 et il est adhérent à dom f puisque toute boule ouverte centrée en (0,1) contient des points (0, 1+k) avec k > 0 qui appartiennent à dom f.

Ce domaine n'est pas fermé puisqu'il existe des points comme (0,1) adhérents à dom f qui ne lui appartiennent pas.

Il n'est pas convexe puisque, par exemple, les points $(0,\frac{1}{2})$ et $(0,\frac{3}{2})$ appartiennent à dom f et

$\lambda = \frac{1}{2} \in [0,1]$, mais $\lambda.(0,\frac{1}{2}) + (1-\lambda).(0,\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}.(0,\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}.(0,\frac{3}{2}) = (0,1) \notin$ dom f.

**Réponse question 2 a)**

Soit $f : D \subset IR^2 \to IR : (x,y) \to f(x,y)$ et $a = (x_0, y_0)$ point intérieur de D.

f est une fonction différentiable en a ssi

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - h.\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - k.\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0}$$

La notion de différentiabilité d'une fonction de $IR^2 \to IR$ en un point signifie géométriquement qu'il existe un plan tangent à la surface correspondante en ce point.

---

**Réponse question 2 b)**

On a f(x,y) = $\sqrt[3]{x}.|x| + 3y^2$.

**(1) Etude de la dérivabilité de f(x,y) en (0,1)**

1°) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) **<u>par rapport à x</u>** en (0,1)

On a $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}.|x|+3-(3)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}.|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Ce calcul de limite donne une opération indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». On regarde séparément les limites à gauche et à droite :

on a $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} -\sqrt[3]{x} = 0$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt[3]{x} = 0$.

Comme ces deux limites existent et sont égales (à 0), $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt[3]{x^2}}$ existe (dans IR) et vaut 0, donc,

$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,1)-f(0,1)}{x-0}$ existe dans IR et vaut 0 et, par conséquent,

**la fonction est dérivable par rapport à x en (0,1) et** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$**.**

2°) Etude de la dérivabilité de la fonction f(x,y) **<u>par rapport à y</u>** en (0,1)

On a $\lim_{y\to 1} \frac{f(0,y)-f(0,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{3y^2-3}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{3(y^2-1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{3(y-1)(y+1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} 3(y+1) = 6$.

Cette limite étant réelle, **la fonction est dérivable par rapport à y en (0,1) et** $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 6$**.**

**(2) Etude de la différentiabilité de f(x,y) en (0,1)**

On a $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,1+k) - f(0,1) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h}.|h| + 3(1+k)^2 - 3 - 0.h - 6k}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h}.|h| + 3(1+2k+k^2) - 3 - 6k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h}.|h| + 3k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} .$$

En posant $\begin{cases} h = \rho.\cos\theta \\ k = \rho.\sin\theta \end{cases}$, on a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h}.|h| + 3k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{\rho\to 0 \\ \theta qcq}} \frac{\sqrt[3]{\rho.\cos\theta}.|\rho.\cos\theta| + 3\rho^2.\sin^2\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} (\sqrt[3]{\rho.\cos\theta}.|\cos\theta| + 3\rho.\sin^2\theta) .$$

On a, quel que soit $\theta$, $-\sqrt[3]{\rho} \le \sqrt[3]{\rho.\cos\theta}.|\cos\theta| \le \sqrt[3]{\rho}$ et $0 \le 3\rho.\sin^2\theta \le 3\rho$, donc, par le théorème du pincement, $\lim_{\rho\to 0} \sqrt[3]{\rho.\cos\theta}.|\cos\theta|$ = 0 et $\lim_{\rho\to 0} 3\rho.\sin^2\theta$ = 0, d'où $\lim_{\rho\to 0} (\sqrt[3]{\rho.\cos\theta}.|\cos\theta| + 3\rho.\sin^2\theta)$ = 0.

On peut donc conclure que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,1+k) - f(0,1) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ = 0 et donc que

**f est différentiable en (0,1)**.

**Réponse question 3 a)**

Une fonction $f:IR^n \rightarrow IR$ est **homogène de degré** $\alpha \in IR$ sur un sous-ensemble A de $IR^n$ ssi pour tout $x \in A$ et tout $t > 0$ : $tx \in A$ et $f(tx) = t^{\alpha} f(x)$.

---

**Réponse question 3 b)**

On a les fonctions $f : IR^2 \rightarrow IR$ , $g : IR \rightarrow IR$ et $h : IR \rightarrow IR$ telles que:

- f est strictement positive, différentiable et homogène de degré 0 dans $IR^2$
- g est différentiable et homogène de degré 2 dans IR
- h est différentiable et homogène de degré 3 dans IR

Et les fonctions $F(x) = f(g(x), \frac{h(x)}{x})$ et $G(x) = \ln[F(x)]$.

1°) Vérifions si la fonction F est homogène dans $IR_0$.

On a $\forall x \in IR_0, \forall t > 0, t.x \in IR_0$ (évident puisque t est non nul!).

D'autre part, $\forall x \in IR_0, \forall t > 0$ :

$$\begin{aligned}
F(t.x) &= f(g(t.x), \frac{h(t.x)}{t.x}) && \text{(définition de F(x))} \\
&= f(t^2.g(x), \frac{t^3.h(x)}{t.x}) && \text{(g, homogène de degré 2 dans IR et h, homogène de degré 3 dans IR)} \\
&= f(t^2.(g(x), \frac{h(x)}{x})) && \\
&= (t^2)^0.f(g(x), \frac{h(x)}{x}) && \text{(f homogène de degré 0 dans } IR^2\text{)} \\
&= t^0.f(g(x), \frac{h(x)}{x}) && \\
&= t^0.F(x) && \text{(définition de F(x))}
\end{aligned}$$

Par conséquent, **F(x) est homogène de degré 0 dans $IR_0$**

On sait que $\forall x \in IR_0, \forall t > 0, t.x \in IR_0$ et, par définition de G(x),
$\forall x \in IR_0, \forall t > 0 : G(t.x) = \ln[F(t.x)]$.
Or, nous venons de montrer que F(x) est homogène de degré 0 dans $IR_0$, donc
$G(t.x) = \ln[F(t.x)] = \ln[t^0.F(x)] = \ln[F(x)] = G(x) = t^0.G(x)$ et, par conséquent,

**G(x) est homogène de degré 0 dans $IR_0$**

2°) On a $F(x) = f(\underbrace{g(x)}_{u}, \underbrace{\frac{h(x)}{x}}_{v})$, d'où $F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(g(x), \frac{h(x)}{x}).g'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x), \frac{h(x)}{x}).\left[\frac{h'(x).x - h(x)}{x^2}\right]$

Et $G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}(g(x), \frac{h(x)}{x}).g'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x), \frac{h(x)}{x}).\left[\frac{h'(x).x - h(x)}{x^2}\right]}{f(g(x), \frac{h(x)}{x})}$.

**Réponse question 4**

Soient $f : IR^n \to IR : x \to f(x)$ et $v \in IR^n$ tel que $\|v\| = 1$.

On dit que $f : IR^n \to IR$ est **dérivable en $\bar{x}$ dans la direction v** ($\|v\| = 1$) ssi

$F(t) = f(\bar{x} + tv)$ est définie au voisinage de 0 pour t et dérivable par rapport à t en t = 0.

La dérivée de f dans la direction v en $\bar{x}$ est alors F'(0).

---

Proposition **:** si $f:IR^n \to IR$ est différentiable en $\bar{x}$, si $\|v\| = 1$,

alors f est dérivable en $\bar{x}$ dans la direction v et cette dérivée vaut

$$\left[\frac{df(\bar{x}+tv)}{dt}\right]_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).v_i = \langle v, \nabla f(\bar{x})\rangle$$

<u>Preuve</u> :

On applique à la fonction d'une variable

$F(t) = f(\bar{x} + tv) = f(\bar{x}_1 + tv_1, \bar{x}_2 + tv_2, \ldots, \bar{x}_n + tv_n)$ la règle de dérivation des fonctions composées :

$$F'(t) = \frac{df(\bar{x}+tv)}{dt} = \frac{d}{dt}[\, f(\bar{x}_1+tv_1, \bar{x}_2+tv_2, \ldots, \bar{x}_n+tv_n)\,]$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}+tv)\,.\frac{\partial(\bar{x}_1+tv_1)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}+tv)\,.\frac{\partial(\bar{x}_2+tv_2)}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}+tv)\,.\frac{\partial(\bar{x}_n+tv_n)}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}+tv)\,.v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}+tv)\,.v_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}+tv)\,.v_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}+tv).v_i$$

De là, $F'(0) = \left[\frac{df(\bar{x}+tv)}{dt}\right]_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}).v_i = \langle v, \nabla f(\bar{x})\rangle$ .

**Réponse question 5 a) (Théorème de Lagrange)**

Soient f et g: $D \subset IR^2 \to IR$.

Si f et g sont $C^1$ au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$, si f admet un extremum local en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0, alors il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\nabla f(\bar{x},\bar{y}) = \lambda^* \nabla g(\bar{x},\bar{y})$ (autrement dit, alors il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = 0$, avec $L(x,y;\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$).

<u>Preuve</u> :

*Hypothèses* : f et g sont $C^1$ au voisinage de $(\bar{x},\bar{y})$, point intérieur de D (1)

$\nabla g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0 \Leftrightarrow (\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}), \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})) \neq (0,0)$. Supposons, par exemple, $\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$ (2)

f(x,y) possède un extremum en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0 $\Rightarrow g(\bar{x},\bar{y}) = 0$ (3)

*Thèse*: il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x},\bar{y};\lambda^*) = 0$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel $\lambda^*$ tel que $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0 \end{cases}$.

Par l'hypothèse (2), l'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda . \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0$ possède une solution unique $\lambda^*$.

Il reste à vérifier que ce $\lambda^*$ vérifie l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda . \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0$.

Les hypothèses (1), (2) et (3) permettent d'appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation g(x,y) = 0 au voisinage du point $(\bar{x},\bar{y})$ : dans ce voisinage, g(x,y) = 0 $\Leftrightarrow$ y = h(x) (notamment, $\bar{y} = h(\bar{x})$), où h est une fonction de classe $C^1$ au voisinage de $\bar{x}$.

- Dans ce voisinage, g(x,h(x)) = 0.

En dérivant les deux membres de cette dernière égalité par rapport à x, on obtient $\frac{\partial g}{\partial x}(x,h(x)).1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x,h(x)).h'(x) = 0$, et, pour x = $\bar{x}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}) = 0$ [1]

- Aussi, f(x,y) possédant un extremum en $(\bar{x},\bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0, on peut dire que la fonction d'une variable F(x) = f(x,h(x)) possède un extremum <u>libre</u> en $\bar{x}$, d'où F'($\bar{x}$) = 0 (condition nécessaire du premier ordre).

Or, F'(x) = $\frac{d}{dx}(f(x,h(x))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,h(x)).1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,h(x)).h'(x)$, d'où

F'($\bar{x}$) = 0 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}) = 0$ [2]

En prenant [2] - $\lambda^*$.[1] pour le réel unique $\lambda^*$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0$, on a

$(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x}))$ - $\lambda^*.(\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}).h'(\bar{x})) = 0$

$\Leftrightarrow (\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})) + (\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\bar{y})).h'(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) - \lambda^* \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = 0$ ce qui achève la démonstration.

**Réponse question 5 b)**

Condition suffisante « forte » :

Soient f et g: $D \subset IR^2 \to IR$.

Si f et g sont $C^2$ au voisinage du point $(\bar{x}, \bar{y})$, point intérieur de leurs domaines tel que $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ et s'il existe $\lambda^*$ : $\frac{\partial L}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda^*) = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\bar{x}, \bar{y}, \lambda^*) = 0$ (avec $L(x, y; \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$), alors si

$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{\left(\bar{x}, \bar{y}, \lambda^*\right)}$ est définie négative (définie positive), f présente un maximum (minimum) local en $(\bar{x}, \bar{y})$ sous la contrainte g(x,y) = 0.

---

**Réponse question 5 c)**

On a f(x,y) = $e^{y-x^2}$ et g(x,y) =$16x^2 + y^2 - 16$.

Il s'agit d'optimiser f(x,y) sous la contrainte g(x,y) = 0.

Domaines de définition : dom f = dom g = IR²

Classes : f et g sont $C^\infty$ sur IR² (f est la composée d'une fonction polynôme avec la fonction $e^u$ et g est une fonction polynome)

Posons $L(x, y; \lambda) = e^{y-x^2} - \lambda(16x^2 + y^2 - 16)$

Condition nécessaire (théorème de Lagrange) : voir réponse question 5 a)

Types de candidats : parmi les points de dom f $\cap$ dom g satisfaisant la contrainte

1°) les éventuels points non intérieurs à dom f $\cap$ dom g : néant car dom f $\cap$ dom g = $IR^2$ qui est un ensemble ouvert

2°) les éventuels points au voisinage desquels f ou g n'est pas $C^1$ : néant car f et g sont $C^\infty$ sur $IR^2$.

3°) les éventuels points où $\nabla g = 0$ :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 32x \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 32x & 2y \end{bmatrix} = [0 \quad 0] \text{ ssi } (x, y) = (0, 0)$$, mais (0,0) ne satisfait pas la contrainte.

4°) les éventuelles solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x.e^{y-x^2} - \lambda.32x = 0 \\ e^{y-x^2} - 2\lambda y = 0 \\ -(16x^2 + y^2 - 16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x.(e^{y-x^2} + 16\lambda) = 0 & (1) \\ e^{y-x^2} - 2\lambda y = 0 & (2) \\ 16x^2 + y^2 - 16 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -\frac{e^{y-x^2}}{16}$

Si x = 0, par (3), $y^2 = 16 \Leftrightarrow y = 4$ et, par (2), $\lambda = \frac{e^4}{8}$, ou $y = -4$ et, par (2), $\lambda = -\frac{e^{-4}}{8}$ .

Si $\lambda = -\frac{e^{y-x^2}}{16}$, par (2), $e^{y-x^2} + \frac{e^{y-x^2}}{8}.y = 0 \Leftrightarrow e^{y-x^2}(1+\frac{y}{8}) = 0$, d'où y = -8

donc, par (3), $16x^2 + 64 - 16 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 + 48 = 0$, ce qui est impossible.

On a donc deux candidats :

(0,4) avec $\lambda^* = \frac{e^4}{8}$ et (0,-4) avec $\lambda^* = -\frac{e^{-4}}{8}$.

<u>Classement (par la condition suffisante « forte »)</u> : voir réponse question 5 b)

On a ici

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,\lambda) = -2.e^{y-x^2} + 4x^2.e^{y-x^2} - 32\lambda \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,\lambda) = e^{y-x^2} - 2\lambda \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y,\lambda) = -2x.e^{y-x^2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(x,y,\lambda)} = \begin{pmatrix} -2.e^{y-x^2} + 4x^2.e^{y-x^2} - 32\lambda & -2x.e^{y-x^2} \\ -2x.e^{y-x^2} & e^{y-x^2} - 2\lambda \end{pmatrix}$$

En (0,4) avec $\lambda^* = \frac{e^4}{8}$, on a $\begin{pmatrix} -2e^4 - 4e^4 & 0 \\ 0 & e^4 - \frac{e^4}{4} \end{pmatrix}$. Étant donné que cette matrice est diagonale, on « lit » ses valeurs propres sur la diagonale. Celles-ci sont égales à $-6.e^4$ et $\frac{3e^4}{4}$, l'une strictement négative et l'autre strictement positive, donc la matrice est indéfinie et la condition suffisante « forte » ne permet pas de conclure :

En (0,-4) avec $\lambda^* = -\frac{e^{-4}}{8}$, on a $\begin{pmatrix} -2e^{-4} + 4e^{-4} & 0 \\ 0 & e^{-4} + \frac{e^{-4}}{4} \end{pmatrix}$. Étant donné que cette matrice est diagonale, on « lit » ses valeurs propres sur la diagonale. Celles-ci sont égales à $2.e^{-4}$ et à $\frac{5e^{-4}}{4}$, toutes deux strictement positives, donc la matrice est définie positive et la condition suffisante « forte » permet de conclure :

**f(x,y) possède un minimum local en (0,-4) sous la contrainte g(x,y) = 0**.